Algorithmen

Programmieren für Ingenieure
Sommer 2015

Andreas Zeller, Universität des Saarlandes

Nächste Woche: Keine Vorlesung, keine Übungen – aber Sprechstunden, und eine große Aufgabe

Themen heute

- Algorithmen
- Suchen und Sortieren
- Komplexität
- Töne!

Algorithmus

- eindeutige *Handlungsvorschrift* zur Lösung eines Problems
- besteht aus endlich vielen, wohldefinierten *Einzelschritten*
- werden typischerweise in *Computerprogrammen* implementiert

Quelle: Wikipedia

Erster Algorithmus

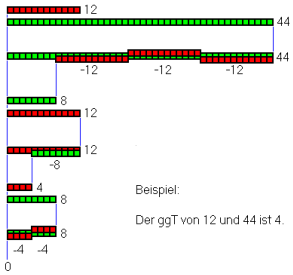
"Wenn CD aber AB nicht misst, und man nimmt bei AB, CD abwechselnd immer das kleinere vom größeren weg, dann muss (schließlich) eine Zahl übrig bleiben, die die vorangehende misst."
(Euklid, Die Elemente, 300 v. Chr.)

- Berechnet den *größten gemeinsamen Teiler*
- Größte natürliche Zahl, durch die sich AB und CD ohne Rest teilen lassen

Der älteste bekannte Algorithmus (als Rechenvorschrift) geht auf Euklid (3. Jahrhundert v. Chr.) von Alexandria zurück; in seinem Werk "Die Elemente" fasst er das mathematische Wissen seiner Zeit zusammen.

Euklidscher Algorithmus

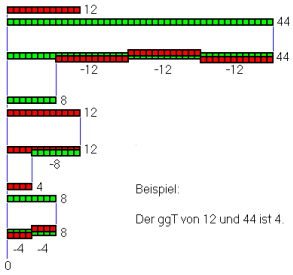
"Wenn CD aber AB nicht misst, und man nimmt bei AB, CD abwechselnd immer das kleinere vom größeren weg, dann muss (schließlich) eine Zahl übrig bleiben, die die vorangehende misst."
(Euklid, Die Elemente)



Der älteste bekannte Algorithmus (als Rechenvorschrift) geht auf Euklid (3. Jahrhundert v. Chr.) von Alexandria zurück; in seinem Werk "Die Elemente" fasst er das mathematische Wissen seiner Zeit zusammen.

Euklidscher Algorithmus

```
int ggt(int a, int b) {
  if (a == 0)
    return b;

  while (b != 0) {
    if (a > b)
      a = a - b;
    else
      b = b - a;
  }

  return a;
}
```



Der älteste bekannte Algorithmus (als Rechenvorschrift) geht auf Euklid (3. Jahrhundert v. Chr.) von Alexandria zurück; in seinem Werk "Die Elemente" fasst er das mathematische Wissen seiner Zeit zusammen.

أبو جعفر محمد بن موسى الخوارزمي

Muhammad ibn Musa al-Chwarizmi, * ~780 • †835–850

Der Begriff "Algorithmus" geht auf den iranischen Universalgelehrten **Abu Dscha'far Muhammad ibn Musa al-Chwarizmi** zurück. Al-Chwarizmi gilt als einer der bedeutendsten Mathematiker, da er sich – anders als etwa Diophant von Alexandrien – nicht mit Zahlentheorie, sondern Algebra als elementarer Untersuchungsform beschäftigte. Auch leistete er bedeutende Beiträge als Geograph und Kartograph, dies auch durch Übersetzungen aus dem Sanskrit und dem Griechischen. (Wikipedia)

الكتاب المختصر في حساب الجبر والمقابلة

Das kurzgefasste Buch über die Rechenverfahren durch Ergänzen und Ausgleichen

Im Jahr 830 schloss er die Arbeit an dem Buch **Kitāb al-muchtasar fi hisab al-dschabr wa-l-muqabala** („Rechnen durch Ergänzung und Ausgleich“) ab. Es ist eine Zusammenstellung von Regeln und Beispielen. Sein systematisch-logisches Vorgehen führte zu einer neuen Form von Verständnis für die Lösung linearer und quadratischer Gleichungen, und machte sie für Laien weitaus nachvollziehbarer. Der Begriff **„Algebra“** wurde aus dem Titel dieses Werkes (**al-dschabr**) abgeleitet. (Wikipedia)

Erster für Rechner entwickelte Algorithmus

- Berechnet *Bernoulli-Zahlen*

  $B_0 = 1$, $B_1 = \pm 1/2$, $B_2 = 1/6$, $B_3 = 0$, $B_4 = -1/30$, $B_5 = 0$, $B_6 = 1/42$, $B_7 = 0$, $B_8 = -1/30$.

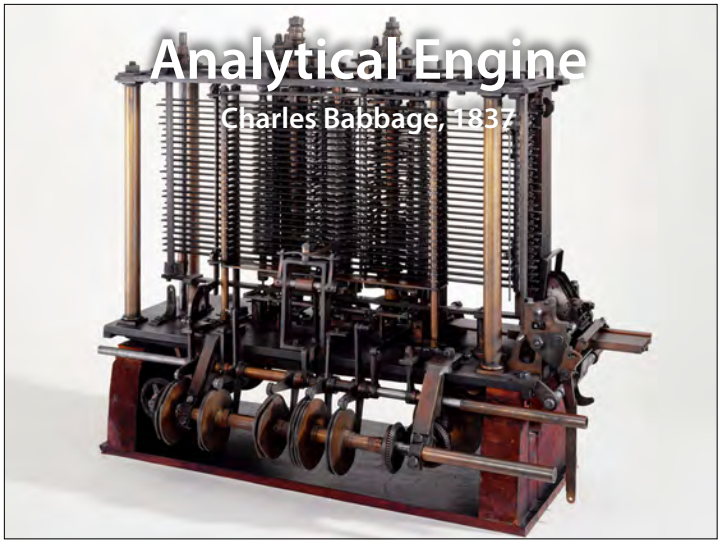
- Folge rationaler Zahlen, die in der Mathematik in verschiedenen Zusammenhängen auftreten
- Beispiel: Summe über Potenzen

$$S_m(n) = \sum_{k=1}^{n} k^m = 1^m + 2^m + \cdots + n^m.$$

$$S_m(n) = \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^{m} \binom{m+1}{k} B_k \, n^{m+1-k},$$

Eigentlich also: Das erste Programm

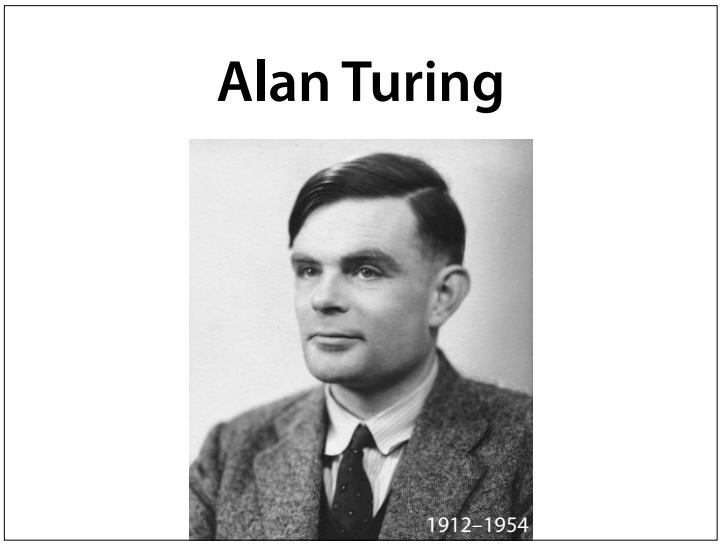
Augusta Ada Byron King, Countess of Lovelace, allgemein als Ada Lovelace bekann, war eine britische Mathematikerin. Für einen nie fertiggestellten mechanischen Computer, die Analytical Engine, schrieb sie das erste Programm. **Aus diesem Grund wird sie als – noch vor dem ersten männlichen Kollegen – erste Programmiererin der Welt betrachtet.** Die Programmiersprache Ada[4] und die Lovelace Medal wurden nach ihr benannt.



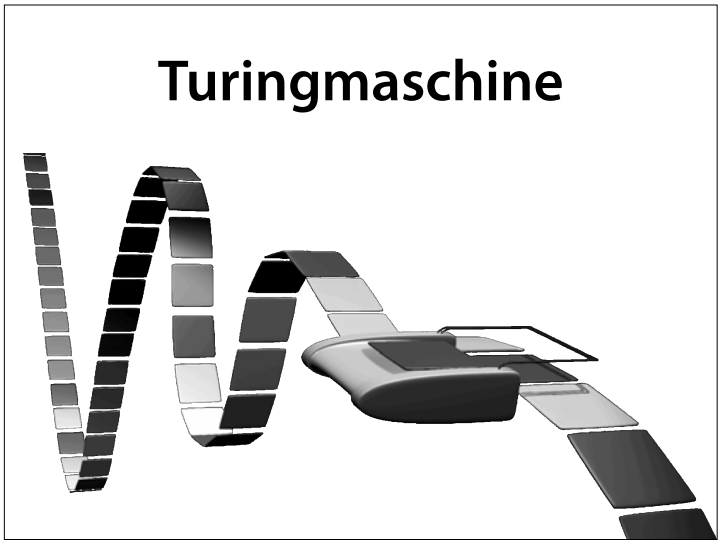
Die Analytical Engine (englisch für analytische Maschine) ist der Entwurf einer mechanischen Rechenmaschine für allgemeine Anwendungen. Sie stammt von dem britischen Mathematikprofessor Charles Babbage (1791–1871) und stellt einen wichtigen Schritt in der Geschichte des Computers dar.

Es ist mittlerweile allgemein anerkannt, dass der Entwurf korrekt war und dass die Analytical Engine funktioniert hätte. Vergleichbare Computer für

---



1936 schließlich führte Turing die Begriffe des Algorithmus und der Berechenbarkeit fassbar, indem er mit seinem Modell die Begriffe des Algorithmus und der Berechenbarkeit als formale, mathematische Begriffe definierte.



Im Allgemeinen wird davon ausgegangen, dass die Turing-Berechenbarkeit das intuitive Verständnis von Berechenbarkeit trifft – alles, was mit einer Turing-Maschine berechnet werden kann, kann überhaupt berechnet werden. (Wikipedia)

Halteproblem

- Nicht alle Probleme können von Programmen gelöst werden
- Das *Halteproblem* etwa besagt, dass es kein Programm gibt, das für ein beliebiges gegebenes Programm *P* entscheidet, ob es ein Ergebnis liefern wird (*hält*) oder nicht.

Collatz-Problem

(Wolfgang Collatz, 1937)

- Beginne mit einer natürlichen Zahl *n*
- Ist *n* gerade, so nimm als nächstes *n*/2
- Ist *n* ungerade, so nimm als nächstes 3*n*+1
- Wiederhole das Ganze

19, 58, 29, 88, 44, 22, 11, 34, 17, 52, 26,
13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, ...

Collatz-Problem

(Wolfgang Collatz, 1937)

- Anscheinend mündet jede so definierte Folge irgendwann in 4, 2, 1, …
- Diese Eigenschaft ist unbewiesen

19, 58, 29, 88, 44, 22, 11, 34, 17, 52, 26,
13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, ...

Halteproblem

```
void collatz(int n) {
  while (n != 1) {
    if (n % 2 == 0)
      n = n / 2;
    else
      n = 3 * n + 1;
  }
}
```

- Wird collatz() für jedes *n* halten (zurückkehren)?
- Lösung nur durch *Ausprobieren* (in unendlicher Zeit)

Es gibt keine Möglichkeit, für alle Programme vollautomatisch die Korrektheit zu beweisen

Halteproblem

Um zu zeigen, dass ein echtes Programm seine Anforderungen erfüllt, müssen wir entweder

- von Hand mathematisches *Wissen und Annahmen* einsetzen, um es zu beweisen, (was sehr aufwändig ist), oder
- wir müssen es *testen* und hoffen, dass unsere Tests ausreichen.

Algorithmen

Berechnen

- Fibonacci
- GgT
- Collatz

Suchen

- Linear
- Binär

Sortieren

- Einfügen
- Mischen

Algorithmen

Berechnen

- Fibonacci
- GgT
- Collatz

Suchen

- Linear
- Binär

Sortieren

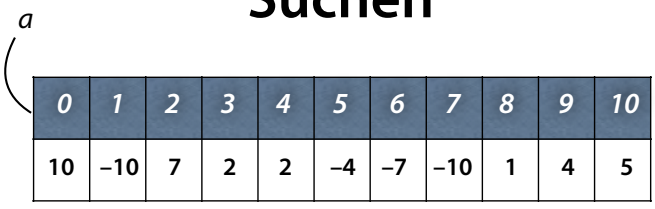
- Einfügen
- Mischen

Felder


```
int a[11];    // 11 Elemente
```

Typ der Elemente — Name des Feldes — Größe des Feldes

Suchen




```
// Wenn x in a[0..size], gib index zurück,
// so dass x == a[index];
// sonst < 0
int find(int a[], int size, int x) {
   // was passiert hier?
}
```

Demo

Suchen

```
// Wenn x in a[0..size], gib index zurück,
// so dass x == a[index];
// sonst < 0
int find(int a[], int size, int x) {
    for (int i = 0; i < size; i++) {
        if (x == a[i])
            return i;
    }
    return -1;
}
```

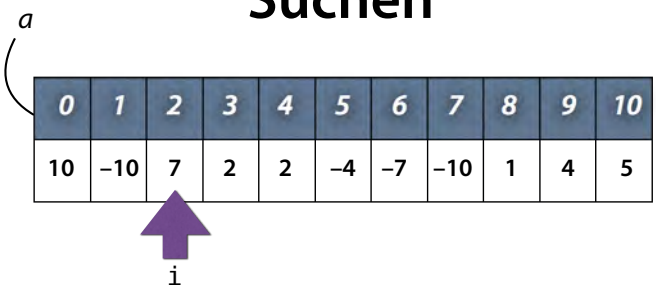
Suchen


```
int index = find(a, 11, -4);
```

Suchen

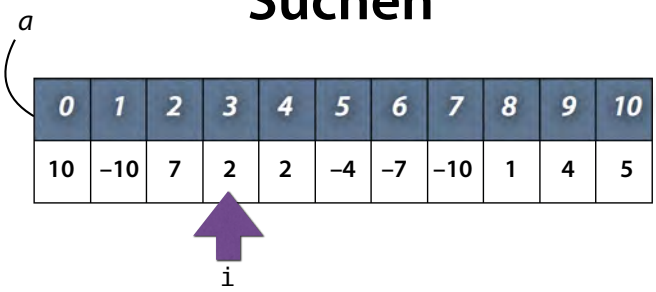

```
int index = find(a, 11, -4);
```

Suchen



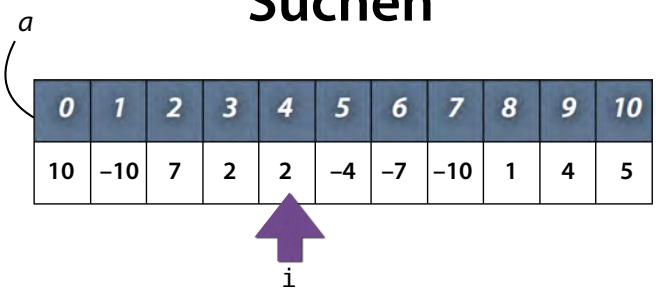

```
int index = find(a, 11, -4);
```

Suchen



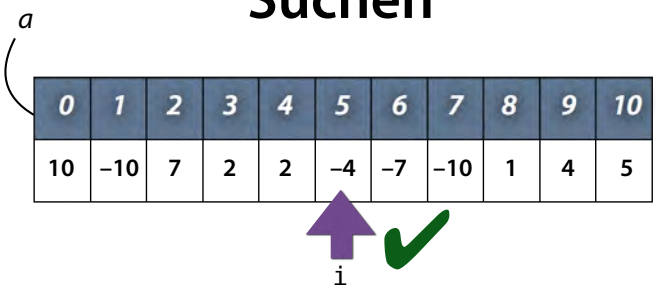

```
int index = find(a, 11, -4);
```

Suchen




```
int index = find(a, 11, -4);
```

Suchen




```
int index = find(a, 11, -4);
```

Komplexität

```
// Wenn x in a[0..size], gib index zurück,
// so dass x == a[index];
// sonst < 0
int find(int a[], int size, int x) {
    for (int i = 0; i < size; i++) {
        if (x == a[i])
            return i;
    }
    return -1;
}
```

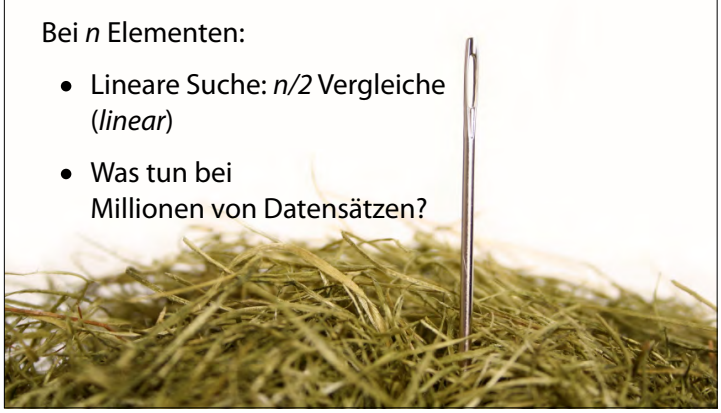
- Wie viele Vergleiche braucht find()?

Antwort: Bei einem Feld der Größe size im Schnitt size/2 Vergleiche.

Komplexität

Bei *n* Elementen:

- Lineare Suche: *n/2* Vergleiche (*linear*)
- Was tun bei Millionen von Datensätzen?



Wenn ich bei jeder Suche erst einmal **alle** Daten durchforsten muss, dauert das sehr lange.

Suchen

a

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10	–10	7	2	2	–4	–7	–10	1	4	5

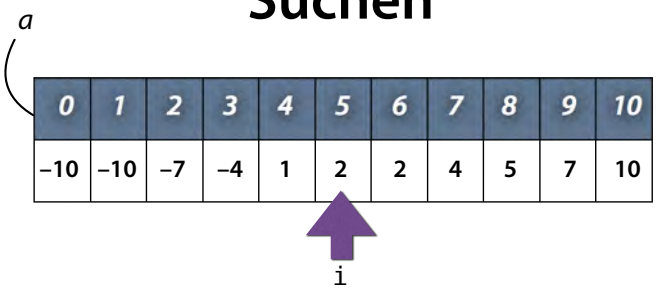
Suchen

a

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
–10	–10	–7	–4	1	2	2	4	5	7	10

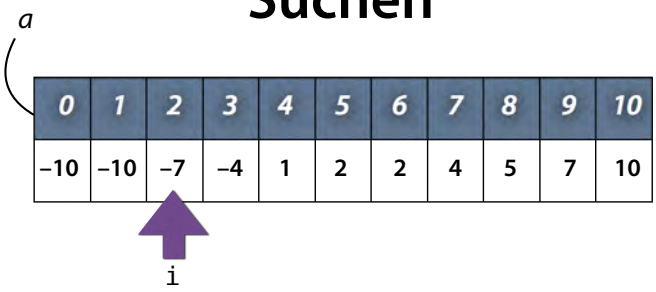
```
// Wenn x in a[0..size], gib index zurück,
// so dass x == a[index];
// sonst < 0
int sorted_find(int a[], int size, int x) {
   // Kann ich jetzt schneller suchen?
}
```

Suchen



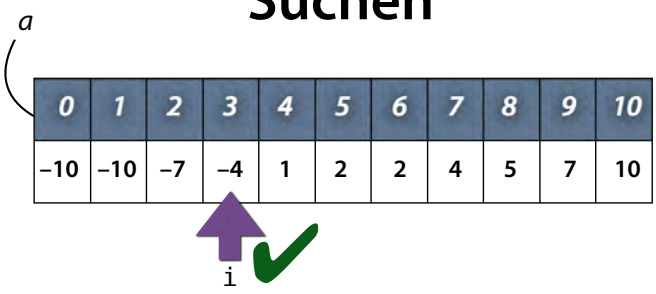

```
int index = sorted_find(a, 11, -4);
```

Suchen




```
int index = sorted_find(a, 11, -4);
```

Suchen

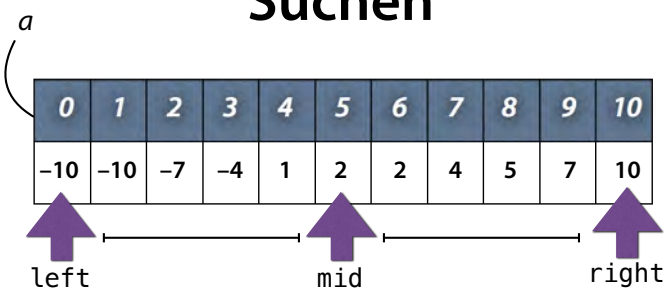



```
int index = sorted_find(a, 11, -4);
```

Plan

- Wir merken uns das *Intervall*, in dem gesucht werden soll
- Wir betrachten *die Mitte des Intervalls*
- Ist das dortige Element größer als das gesuchte, suchen wir in der *linken Hälfte*
- Ist das Element kleiner als das gesuchte, suchen wir in der *rechten Hälfte*

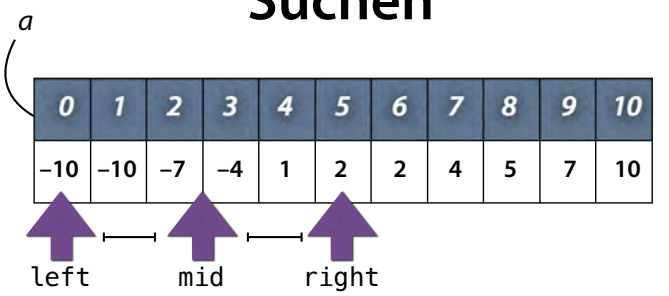
Suchen




```
int index = sorted_find(a, 11, -4);
```

Zu Beginn ist das Intervall das gesamte Feld; wir suchen in der Mitte.

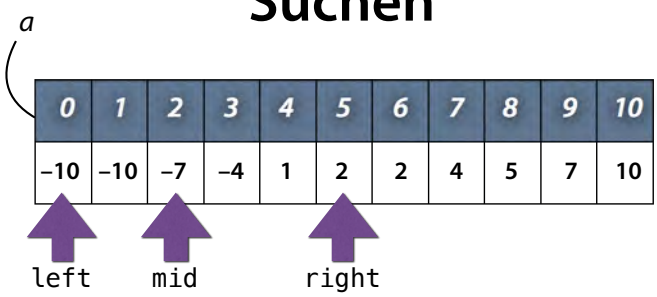
Suchen




```
int index = sorted_find(a, 11, -4);
```

Wir suchen weiter in der linken Hälfte des Intervalls; dort ebenfalls in der Mitte

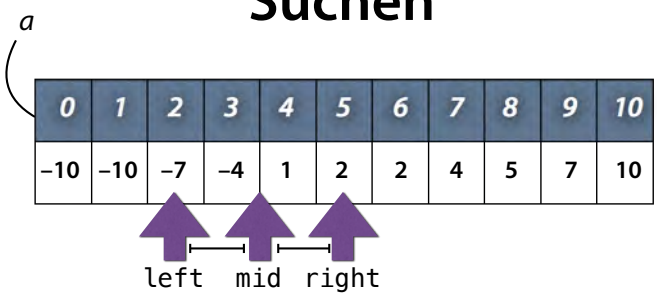
Suchen




```
int index = sorted_find(a, 11, -4);
```

Die Mitte ist hier kein ganzzahliger Wert; wir runden einfach ab.

Suchen

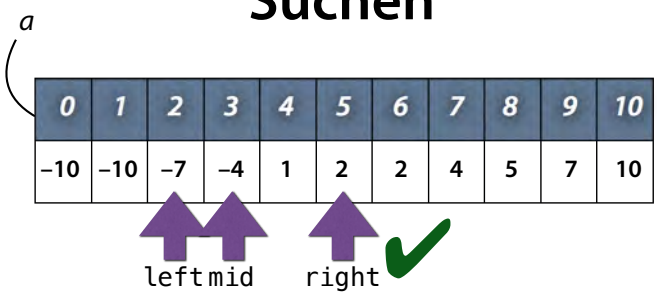



```
int index = sorted_find(a, 11, -4);
```

Jetzt sind wir zu klein; also suchen wir in der rechten Hälfte

---

Suchen




```
int index = sorted_find(a, 11, -4);
```

- Wie viele Vergleiche braucht sorted_find()?

Nach Abrunden haben wir das gesuchte Element gefunden.

Demo

Binäre Suche

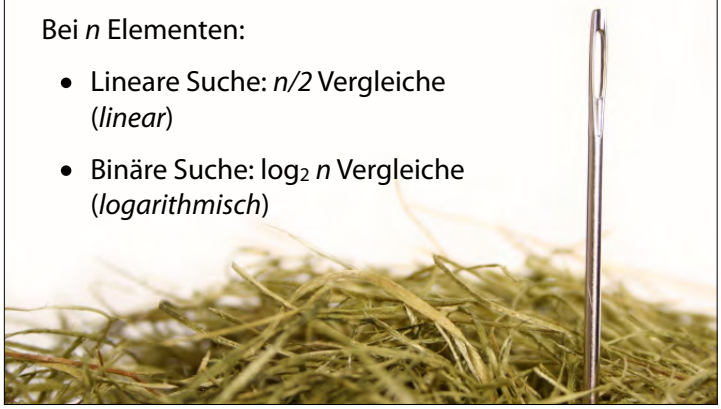
```
int sorted_find(int a[], int size, int x) {
    int left = 0;
    int right = size - 1;

    while (left <= right) {
        int mid = left + ((right - left) / 2);
        if (x == a[mid])
            return mid;
        else if (x < a[mid])
            right = mid - 1;
        else // (x > a[mid])
            left  = mid + 1;
    }
    return -1;
}
```

Warum heißt es hier: mid = left + ((right – left) / 2) und nicht (einfacher) mid = (left + right) / 2? Weil es bei der Berechnung von left + right bei großen Feldern zu einem **Überlauf** kommen kann.

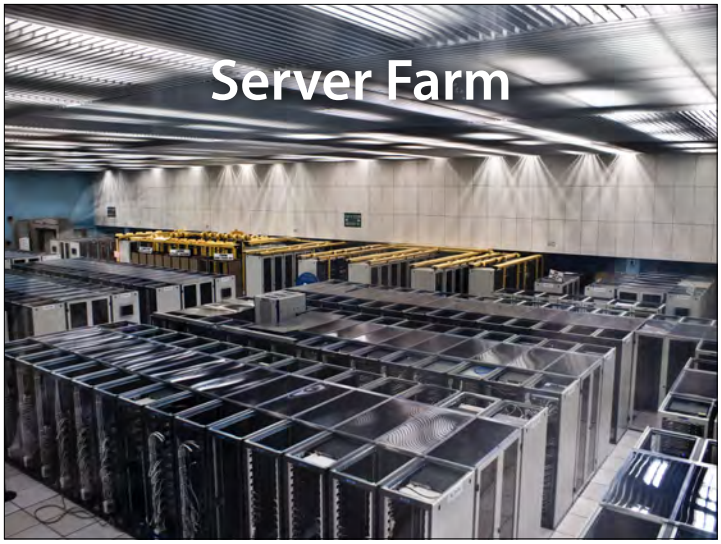
Komplexität im Vergleich

Bei *n* Elementen:

- Lineare Suche: *n/2* Vergleiche (*linear*)
- Binäre Suche: $\log_2 n$ Vergleiche (*logarithmisch*)



Es gibt noch quadratisch (n^2), kubisch (n^3), polynomiell (n^m) und exponentiell (m^n)



Effiziente Suche in großen Datenbeständen ist mittlerweile der Hauptzweck der meisten installierten Server, die Dienste über das Internet bereitstellen. Google alleine betreibt etwa 1 Million solcher Server.

Algorithmen

Berechnen	Suchen	Sortieren
• Fibonacci	• Linear	• Einfügen
• GgT	• Binär	• Mischen
• Collatz		

Algorithmen

Berechnen	Suchen	Sortieren
• Fibonacci	• L	• Einfügen
• GgT	• Binär	• Mischen
• Collatz		

Sortieren

a

0	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
10	–10	7	2	2	–4	–7	–10	1	4	5

Sortieren

a

0	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
–10	–10	–7	–4	1	2	2	4	5	7	10

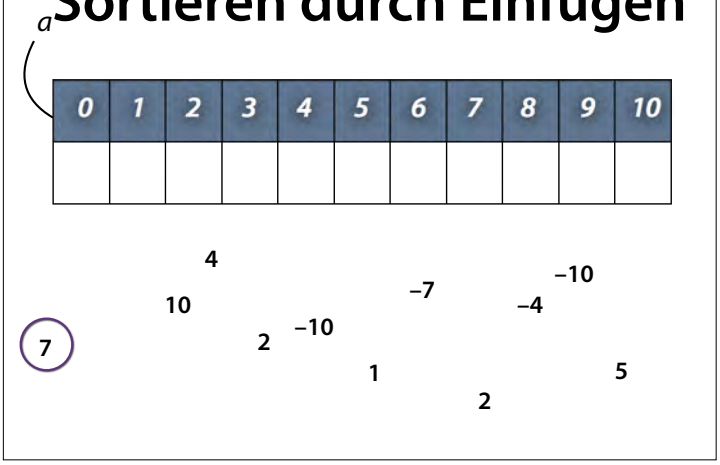
Wie sortiere ich ein Feld?

Sortieren durch Einfügen

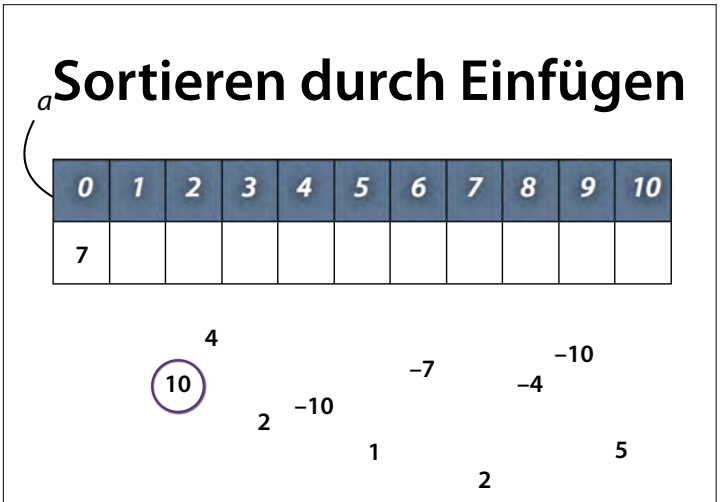
a

0	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
10	–10	7	2	2	–4	–7	–10	1	4	5

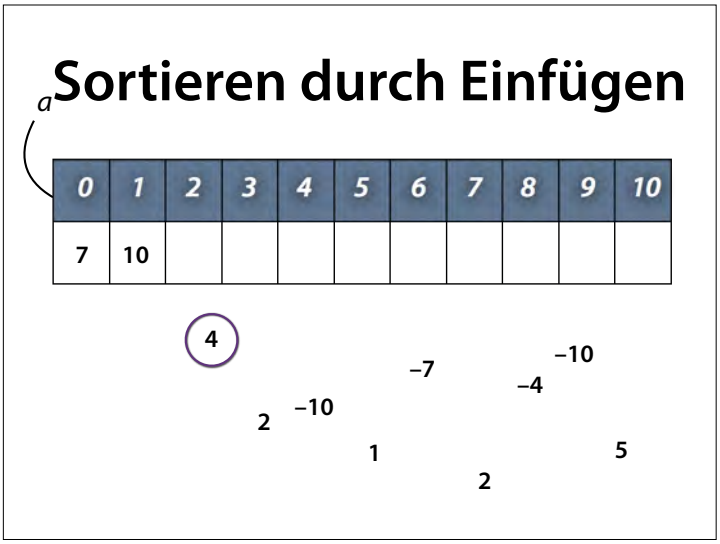
Sortieren durch Einfügen



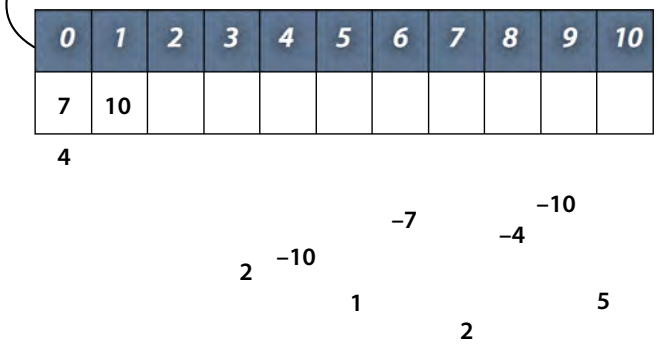
Sortieren durch Einfügen



Sortieren durch Einfügen

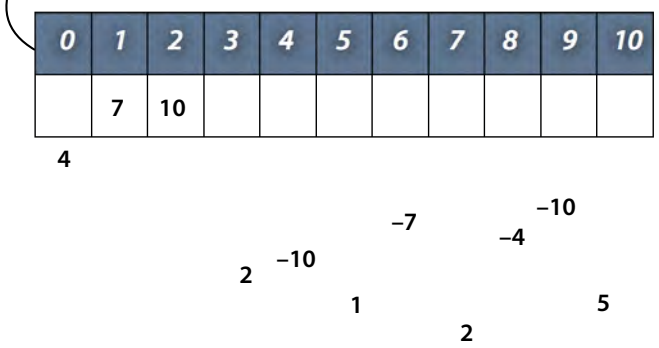


Sortieren durch Einfügen



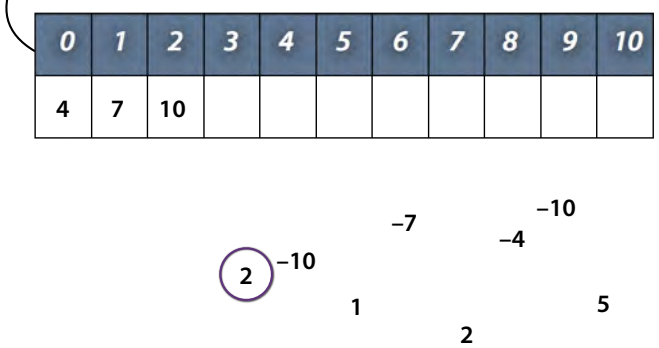
4 −7 −10 −4 −10 2 −10 1 5 2

Sortieren durch Einfügen



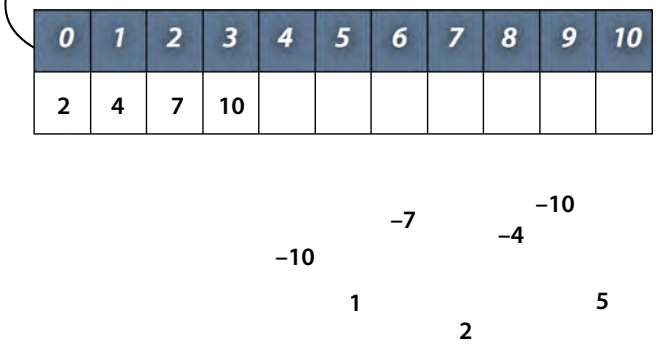
4 −7 −10 −4 −10 2 −10 1 5 2

Sortieren durch Einfügen



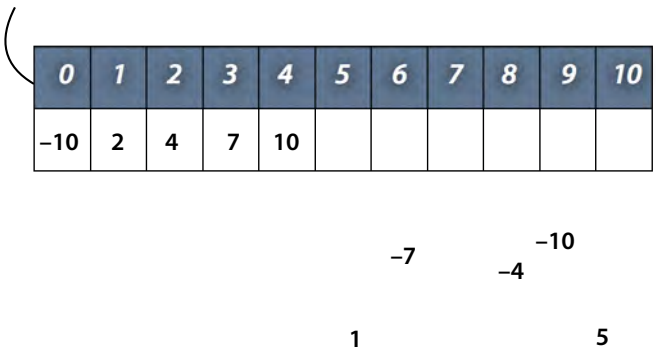
−7 −10 −4 −10 2 −10 1 5 2

Sortieren durch Einfügen



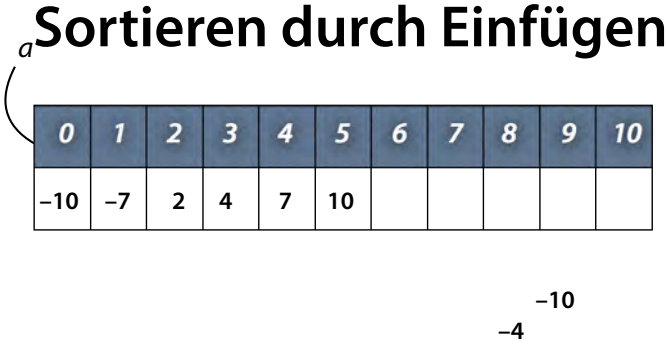
–10 –7 –4 –10 1 5 2

Sortieren durch Einfügen



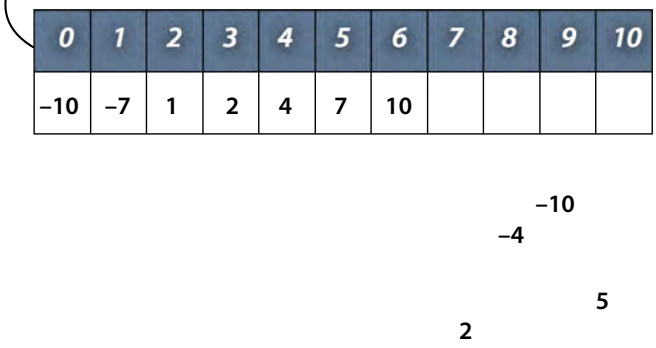
–7 –10 –4 1 5 2

Sortieren durch Einfügen



–10 –4 1 5 2

Sortieren durch Einfügen



–10
–4
5
2

Sortieren durch Einfügen

–4
5
2

Sortieren durch Einfügen

5
2

Sortieren durch Einfügen

a

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
–10	–10	–7	–4	1	2	4	5	7	10	

Sortieren durch Einfügen

a

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
–10	–10	–7	–4	1	2	2	4	5	7	10

Sortieren vor Ort

a

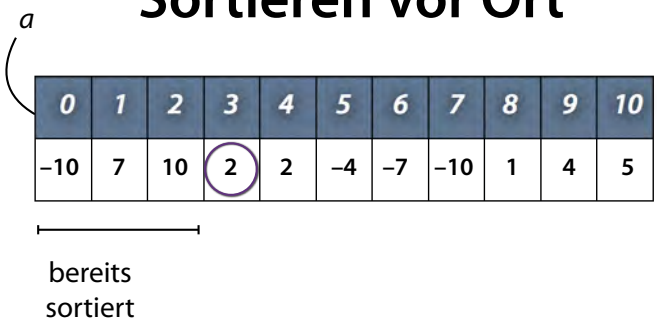
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10	–10	7	2	2	–4	–7	–10	1	4	5

- Wir möchten *innerhalb des Feldes* sortieren
- Annhme: Feld a[0…i–1] ist bereits sortiert
- Wir betrachten das Element a[i]…
- …und fügen es in das sortierte Feld ein

Sortieren vor Ort

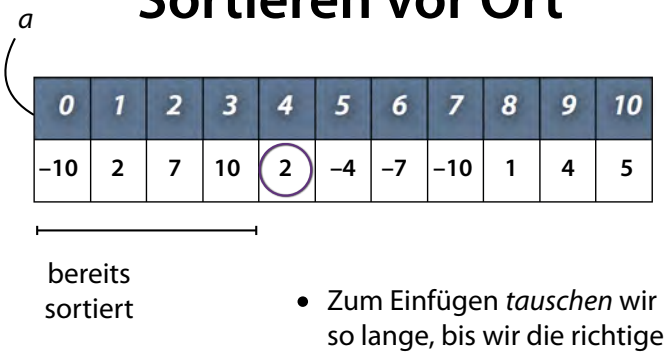
Sortieren vor Ort

Sortieren vor Ort



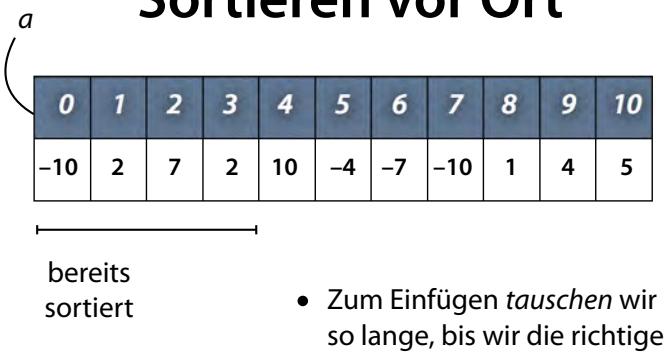
Sortieren vor Ort

Sortieren vor Ort



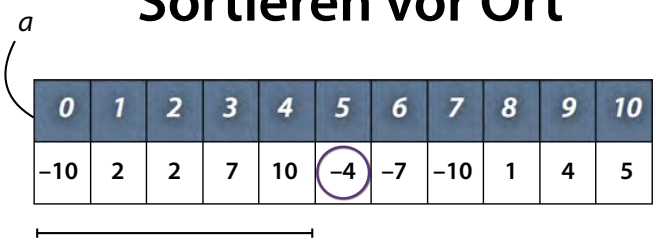
- Zum Einfügen *tauschen* wir so lange, bis wir die richtige Position erreicht haben

Sortieren vor Ort



- Zum Einfügen *tauschen* wir so lange, bis wir die richtige Position erreicht haben

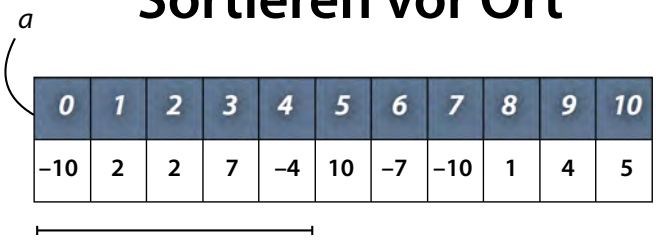
Sortieren vor Ort



bereits sortiert

- Zum Einfügen *tauschen* wir so lange, bis wir die richtige Position erreicht haben

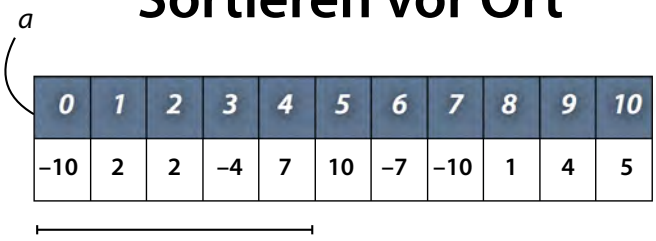
Sortieren vor Ort



bereits sortiert

- Zum Einfügen *tauschen* wir so lange, bis wir die richtige Position erreicht haben

Sortieren vor Ort



bereits sortiert

- Zum Einfügen *tauschen* wir so lange, bis wir die richtige Position erreicht haben

Sortieren vor Ort

a

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
–10	2	–4	2	7	10	–7	–10	1	4	5

bereits sortiert

- Zum Einfügen *tauschen* wir so lange, bis wir die richtige Position erreicht haben

Sortieren vor Ort

a

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
–10	–4	2	2	7	10	–7	–10	1	4	5

bereits sortiert

- Zum Einfügen *tauschen* wir so lange, bis wir die richtige Position erreicht haben

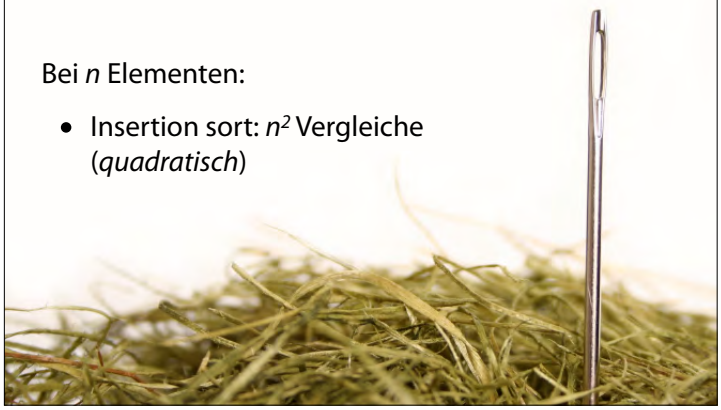
Demo

Sortieren durch Einfügen

```
void insertion_sort(int a[], int size) {
    for (int i = 1; i < size; i++) {
        int j = i;
        while (j > 0 && a[j - 1] > a[j]) {
            // Swap a[j] and a[j - 1]
            int tmp = a[j];
            a[j] = a[j - 1];
            a[j - 1] = tmp;
            j--;
        }
    }
}
```

- Wie viele Vergleiche braucht insertion_sort()?

Komplexität im Vergleich



Bei *n* Elementen:

- Insertion sort: n^2 Vergleiche (*quadratisch*)

Es gibt noch quadratisch (n^2), kubisch (n^3), polynomiell (n^m) und exponentiell (m^n)

Sortieren durch Mischen

0	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
10	–10	7	2	2	–4	–7	–10	1	4	5

Sortieren durch Mischen

0	1	2	3	4	5
10	–10	7	2	2	–4

6	7	8	9	10
–7	–10	1	4	5

Sortieren durch Mischen

0	1	2	3	4	5
10	–10	7	2	2	–4

6	7	8	9	10
–7	–10	1	4	5

Sortieren durch Mischen

0	1	2	3	4	5
–10	–4	2	2	7	10

6	7	8	9	10
–10	–7	1	4	5

Sortieren durch Mischen

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

0	1	2	3	4	5
–10	–4	2	2	7	10

6	7	8	9	10
–10	–7	1	4	5

Sortieren durch Mischen

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
–10										

0	1	2	3	4	5
	–4	2	2	7	10

6	7	8	9	10
–10	–7	1	4	5

Sortieren durch Mischen

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
–10	–10									

0	1	2	3	4	5
	–4	2	2	7	10

6	7	8	9	10
	–7	1	4	5

Sortieren durch Mischen

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
–10	–10	–7								

0	1	2	3	4	5
	–4	2	2	7	10

6	7	8	9	10
		1	4	5

Sortieren durch Mischen

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
–10	–10	–7	–4							

0	1	2	3	4	5
		2	2	7	10

6	7	8	9	10
		1	4	5

Sortieren durch Mischen

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
–10	–10	–7	–4	1						

0	1	2	3	4	5
		2	2	7	10

6	7	8	9	10
			4	5

Sortieren durch Mischen

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
–10	–10	–7	–4	1	2					

0	1	2	3	4	5
			2	7	10

6	7	8	9	10
			4	5

Sortieren durch Mischen

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
–10	–10	–7	–4	1	2	2				

0	1	2	3	4	5
				7	10

6	7	8	9	10
			4	5

Sortieren durch Mischen

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
–10	–10	–7	–4	1	2	2	4			

0	1	2	3	4	5
				7	10

6	7	8	9	10
				5

Sortieren durch Mischen

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
–10	–10	–7	–4	1	2	2	4	5		

0	1	2	3	4	5
				7	10

6	7	8	9	10

Sortieren durch Mischen

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
–10	–10	–7	–4	1	2	2	4	5	7	

0	1	2	3	4	5
					10

6	7	8	9	10

Sortieren durch Mischen

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
–10	–10	–7	–4	1	2	2	4	5	7	10

0	1	2	3	4	5

6	7	8	9	10

Sortieren durch Mischen

0	1	2	3	4	5
10	–10	7	2	2	–4

6	7	8	9	10
–7	–10	1	4	5

Sortieren durch Mischen

Wie sortiere ich die Teilfelder?

0	1	2	3	4	5
–10	–4	2	2	7	10

6	7	8	9	10
–10	–7	1	4	5

Antwort: Indem ich mergesort() **rekursiv** auf die Teilfelder anwende.

Rekursives Sortieren

6 5 3 1 8 7 2 4

- Grundidee: mergesort() *rekursiv* auf die Teilfelder anwenden

John von Neumann

Mergesort wurde von John von Neumann erfunden

Demo

Aufruf

```
// Sort a[0..size], using b[0..size] as a buffer
void merge_sort(int a[], int b[], int size)
{
    partial_merge_sort(a, b, 0, size);
}
```

- Wir nutzen *b[]* als das Hilfsfeld
- Muss gleiche Größe *size* wie *a*[] haben

Sortieren

```
// Sort a[begin..end], using b[begin..end] as buffer
void partial_merge_sort(int a[], int b[],
                        int begin, int end)
{
    if (end - begin < 2)
        return;

    // Split and sort
    int mid = begin + (end - begin) / 2;
    partial_merge_sort(a, b, begin, mid);
    partial_merge_sort(a, b, mid, end);

    // Merge and copy
    merge(a, b, begin, mid, end);
    copy(a, b, begin, end);
}
```

mid wird wie bei der binären Suche verwendet

Mischen

```
// Merge a[begin..mid - 1] and a[mid..end] into b[begin..end]
void merge(int a[], int b[], int begin, int mid, int end) {
    int i_begin = begin;
    int i_mid   = mid;
    for (int j = begin; j < end; j++)
        if (i_begin < mid &&
            (i_mid >= end || a[i_begin] <= a[i_mid]))
            b[j] = a[i_begin++];
        else
            b[j] = a[i_mid++];
}
```

- P && Q wertet Q nur aus, wenn P wahr ist
- P || Q wertet Q nur aus, wenn P falsch ist
- Schützt hier Feldgrenzen vor Zugriff

(Bedingung Stück für Stück entwickeln)

Kopieren

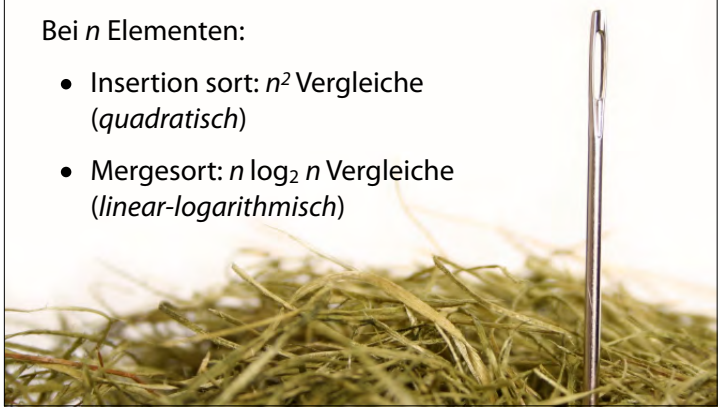
```
// Copy b[begin..end] into a[begin..end]
void copy(int a[], int b[], int begin, int end) {
    for (int k = begin; k < end; k++)
        a[k] = b[k];
}
```

- Wie viele Vergleiche braucht merge_sort()?

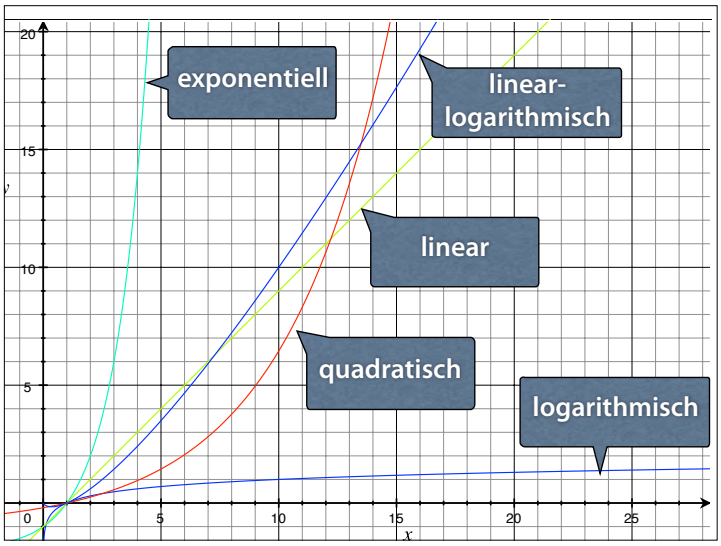
Komplexität im Vergleich

Bei *n* Elementen:

- Insertion sort: n^2 Vergleiche (*quadratisch*)
- Mergesort: $n \log_2 n$ Vergleiche (*linear-logarithmisch*)



Es gibt noch quadratisch (n_m), kubisch (n_3), polynomiell (n_m) und exponentiell (m_n)



Man vergleiche die unterschiedlichen Wachstumskurven

Algorithmen

Berechnen	Suchen	Sortieren
• Fibonacci	• L	• Einfügen
• GgT	• Binär	• Mischen
• Collatz		

Algorithmen

Berechnen

- Fibonacci
- GgT
- Collatz

Suchen

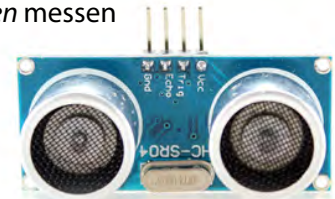
- Linear
- Binär

Sortieren

- Einfügen
- Mischen

Ultraschall!

- Der HC-SR04 vereinigt einen Ultraschall-Lautsprecher mit einem Mikrofon
- Kann *Signallaufzeiten* messen



Lautsprecher Mikrofon

Summer

- Einfacher Piezo-Summer
- Kann Töne in beliebigen Frequenzen ausgeben

Theremin

+

Theremin

The Big Bang Theory – Sheldon's Theremin – Staffel 4. Das gespielte Lied ist “Nobody knows the trouble I’ve seen”.

https://www.youtube.com/watch?v=i7v1R7_85IY&feature=kp

Algorithmus

- eindeutige *Handlungsvorschrift* zur Lösung eines Problems
- besteht aus endlich vielen, wohldefinierten *Einzelschritten*
- werden typischerweise in *Computerprogrammen* implementiert

Algorithmen

Berechnen
- Fibonacci
- GgT
- Collatz

Suchen
- Linear
- Binär

Sortieren
- Einfügen
- Mischen

Sortieren vor Ort

a

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10	–10	7	2	2	–4	–7	–10	1	4	5

- Wir möchten *innerhalb des Feldes* sortieren
- Annhme: Feld a[0…i–1] ist bereits sortiert
- Wir betrachten das Element a[i]…
- …und fügen es in das sortierte Feld ein

Theremin =

+

Handouts

Halteproblem

```
void collatz(int n) {
  while (n != 1) {
    if (n % 2 == 0)
      n = n / 2;
    else
      n = 3 * n + 1;
  }
}
```

- Wird collatz() für jedes *n* halten (zurückkehren)?
- Lösung nur durch *Ausprobieren* (in unendlicher Zeit)

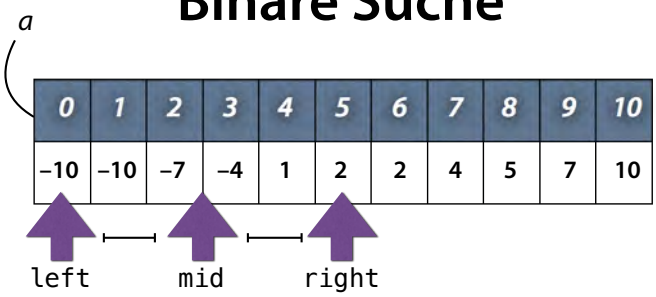
Es gibt keine Möglichkeit, für alle Programme vollautomatisch die Korrektheit zu beweisen

Binäre Suche

```
int sorted_find(int a[], int size, int x) {
    int left = 0;
    int right = size - 1;

    while (left <= right) {
        int mid = left + ((right - left) / 2);
        if (x == a[mid])
            return mid;
        else if (x < a[mid])
            right = mid - 1;
        else // (x > a[mid])
            left  = mid + 1;
    }
    return -1;
}
```

Warum heißt es hier: mid = left + ((right – left) / 2) und nicht (einfacher) mid = (left + right) / 2? Weil es bei der Berechnung von left + right bei großen Feldern zu einem **Überlauf** kommen kann.

Binäre Suche




```
int index = sorted_find(a, 11, -4);
```

Wir suchen weiter in der linken Hälfte des Intervalls; dort ebenfalls in der Mitte

---

Sortieren durch Einfügen

```
void insertion_sort(int a[], int size) {
    for (int i = 1; i < size; i++) {
        int j = i;
        while (j > 0 && a[j - 1] > a[j]) {
            // Swap a[j] and a[j - 1]
            int tmp = a[j];
            a[j] = a[j - 1];
            a[j - 1] = tmp;
            j--;
        }
    }
}
```

Sortieren durch Mischen

```
// Sort a[0..size], using b[0..size] as a buffer
void merge_sort(int a[], int b[], int size)
{
    partial_merge_sort(a, b, 0, size);
}
```

- Wir nutzen *b[]* als das Hilfsfeld
- Muss gleiche Größe *size* wie *a*[] haben

Sortieren

```
// Sort a[begin..end], using b[begin..end] as buffer
void partial_merge_sort(int a[], int b[],
                        int begin, int end)
{
    if (end - begin < 2)
        return;

    // Split and sort
    int mid = begin + (end - begin) / 2;
    partial_merge_sort(a, b, begin, mid);
    partial_merge_sort(a, b, mid, end);

    // Merge and copy
    merge(a, b, begin, mid, end);
    copy(a, b, begin, end);
}
```

mid wird wie bei der binären Suche verwendet

Mischen

```
// Merge a[begin..mid - 1] and a[mid..end] into b[begin..end]
void merge(int a[], int b[], int begin, int mid, int end) {
    int i_begin = begin;
    int i_mid   = mid;
    for (int j = begin; j < end; j++)
        if (i_begin < mid &&
            (i_mid >= end || a[i_begin] <= a[i_mid]))
            b[j] = a[i_begin++];
        else
            b[j] = a[i_mid++];
}
```

- P && Q wertet Q nur aus, wenn P wahr ist
- P || Q wertet Q nur aus, wenn P falsch ist
- Schützt hier Feldgrenzen vor Zugriff

(Bedingung Stück für Stück entwickeln)

Kopieren

```
// Copy b[begin..end] into a[begin..end]
void copy(int a[], int b[], int begin, int end) {
    for (int k = begin; k < end; k++)
        a[k] = b[k];
}
```